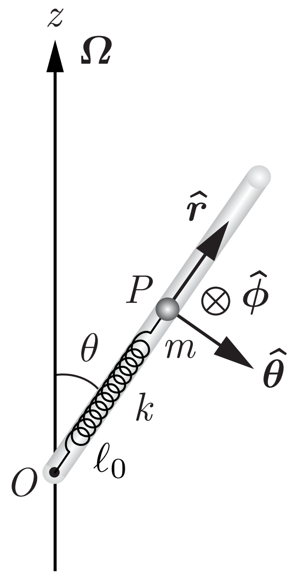
1. Tube en rotation avec ressort (3.5/10 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



Une bille de masse m, considérée comme un point matériel P, coulisse sans frottement dans un tube. Le tube est en rotation à vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\hat{\boldsymbol{z}}$, où $\Omega = \text{cste} > 0$, dans le sens trigonométrique autour de l'axe vertical Oz. Lors de la rotation du tube, l'angle d'inclinaison constant de l'axe du tube par rapport à l'axe vertical Oz est $\theta = \text{cste}$ où $0 < \theta < \pi$. La bille est attachée à un ressort de constante élastique k et de longueur au repos ℓ_0. L'autre extrémité du ressort est fixée à l'origine O.

On attache un repère sphérique $\left(P, \hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$ à la bille et on décrit son mouvement par rapport au référentiel d'inertie $\mathcal{R}$ de la terre.

Les réponses doivent être exprimées en termes des grandeurs scalaires données ci-dessus, des coordonnées sphériques r, θ et ϕ, de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ du repère sphérique et de la norme du champ gravitationnel g.

Questions et réponses au verso !

1. (**1.0 point**) Déterminer la norme et l'orientation de la force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ exercée par le tube sur la bille en fonction de son mouvement.

   Les contraintes géométriques sur l'angle de nutation θ, la vitesse angulaire azimutale $\dot{\phi}$ et leurs dérivées temporelles sont les suivantes,

$$\begin{aligned} &\theta = \text{cste} && \Rightarrow && \dot{\theta} = 0 && \Rightarrow && \ddot{\theta} = 0 \\ &\dot{\phi} = \Omega = \text{cste} && \Rightarrow && \ddot{\phi} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

   Compte tenu des contraintes géométriques (1), l'accélération en coordonnées sphériques s'écrit,

$$\boldsymbol{a} = \left(\ddot{r} - r\Omega^2 \sin^2\theta\right)\hat{\boldsymbol{r}} - r\Omega^2 \sin\theta\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + 2\dot{r}\Omega\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{2}$$

   Les forces extérieures qui s'exercent sur la bille sont la force élastique $\boldsymbol{F}_e$ exercée par le ressort, la force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ du tube sur la bille et le poids $\boldsymbol{P}$ de bille qui sont exprimées en coordonnées sphériques comme,

$$\boldsymbol{F}_e = -\,k\left(r - \ell_0\right)\hat{\boldsymbol{r}} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{N} = N_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + N_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g} = mg\left(-\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \tag{5}$$

   La loi vectorielle du mouvement s'écrit,

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{a} \tag{6}$$

   En substituant les expressions (3)-(5) des forces extérieures et l'expression (2) de l'accélération dans la loi vectorielle du mouvement (6) et on projetant cette loi le long des lignes de coordonnées sphériques, on obtient les trois équations scalaires suivantes,

$$\text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{r}}: \quad -\,k\left(r - \ell_0\right) - mg\cos\theta = m\left(\ddot{r} - r\Omega^2\sin^2\theta\right) \tag{7}$$

$$\text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}: \quad N_\theta + mg\sin\theta = -\,mr\Omega^2\sin\theta\cos\theta \tag{8}$$

$$\text{selon} \quad \hat{\boldsymbol{\phi}}: \quad N_\phi = 2m\dot{r}\Omega\sin\theta \tag{9}$$

   En substituant les équations de contraintes (8) et (9) dans l'équation (4), la force de réaction normale s'écrit,

$$\boldsymbol{N} = -\,m\left(g + r\Omega^2\cos\theta\right)\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + 2m\dot{r}\Omega\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{10}$$

2. (**0.5 point**) Déterminer la coordonnée radiale d'équilibre r_0 de la bille, c'est à dire la coordonnée pour laquelle il n'y a pas de mouvement relatif de la bille par rapport au tube pour une vitesse angulaire Ω telle que $\Omega^2\sin^2\theta \neq k/m$.

   L'équation du mouvement radial de la bille (7) peut être écrite comme,

$$\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\sin^2\theta\right)r - \frac{k}{m}\left(\ell_0 - \frac{mg}{k}\cos\theta\right) = 0 \tag{11}$$

   puis mise sous la forme suivante,

$$\ddot{r} + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\sin^2\theta\right)\left(r - \frac{\ell_0 - \dfrac{mg}{k}\cos\theta}{1 - \dfrac{m\Omega^2}{k}\sin^2\theta}\right) = 0 \tag{12}$$

   La condition d'équilibre de la bille par rapport au tube est l'absence de mouvement radial,

$$r = r_0 = \text{cste} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = 0 \tag{13}$$

Pour une vitesse angulaire Ω telle que $\Omega^2 \sin^2\theta \neq k/m$, la condition d'équilibre (13) appliquée à l'équation du mouvement radial (12) donne la position d'équilibre radial,

$$r_0 = \frac{\ell_0 - \dfrac{mg}{k}\cos\theta}{1 - \dfrac{m\Omega^2}{k}\sin^2\theta} = \frac{\dfrac{k\ell_0}{m} - g\cos\theta}{\dfrac{k}{m} - \Omega^2\sin^2\theta} \tag{14}$$

3. (**1.0 point**) Déterminer la condition sur la vitesse angulaire Ω pour que la position d'équilibre r_0 soit une position d'équilibre stable, c'est-à-dire que le mouvement radial autour de la position d'équilibre soit un mouvement harmonique oscillatoire, et déterminer la période T de ce mouvement d'oscillation.

   La déviation radiale de la position d'équilibre s'écrit,

   $$\rho = r - r_0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\rho} = \ddot{r} \tag{15}$$

   Compte tenu la déviation (15) de la position d'équilibre (14) et de sa dérivée temporelle seconde, l'équation du mouvement radial est mise sous la forme,

   $$\ddot{\rho} + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\sin^2\theta\right)\rho = 0 \tag{16}$$

   La position d'équilibre r_0 est stable dans le référentiel accéléré $\mathcal{R}'$ du tube en rotation si la force élastique est plus grande que la projection de la force centrifuge le long de l'axe du tube,

   $$\frac{k}{m} > \Omega^2\sin^2\theta \tag{17}$$

   Ainsi, cette condition est satisfaite si la vitesse angulaire de rotation est suffisamment faible,

   $$\Omega < \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{18}$$

   Dans ce cas, la pulsation du mouvement harmonique oscillatoire (16) est alors,

   $$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \Omega^2\sin^2\theta} \tag{19}$$

   La période d'oscillation de ce mouvement est,

   $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{m} - \Omega^2\sin^2\theta}} \tag{20}$$

4. (**0.5 point**) Déterminer l'énergie mécanique E de la bille par rapport au référentiel d'inertie $\mathcal{R}$ de la terre en prenant comme référence d'énergie potentielle de pesanteur le plan horizontal contenant l'origine O et comme référence d'énergie potentielle élastique l'extrémité du ressort en absence de déformation.

   L'énergie cinétique totale T de la bille est la somme de la contribution due au mouvement de translation radial de la bille dans le tube et de la contribution due au mouvement de rotation azimutal du tube,

   $$T = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\,m\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\,\Omega^2\right) \tag{21}$$

   L'énergie potentielle totale de la bille est la somme de l'énergie potentielle élastique V_e et de l'énergie potentielle de pesanteur V_g,

   $$V = V_e + V_g = \frac{1}{2}\,k\,(r - \ell_0)^2 + mgr\cos\theta \tag{22}$$

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique totale T et de l'énergie potentielle totale V,

$$E = T + V = \frac{1}{2}\,m\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\,\Omega^2\right) + \frac{1}{2}\,k\,(r - \ell_0)^2 + mgr\cos\theta \tag{23}$$

5. (**0.5 point**) L'énergie mécanique E de la bille par rapport au référentiel d'inertie $\mathcal{R}$ de la terre est-elle constante quel que soit le mouvement de la bille dans le tube ?

   Oui □ Non ■

   Si non, quelle condition faut-il imposer pour que l'énergie mécanique E soit constante ?

   Solution 1 : La dérivée temporelle de l'expression (23) de l'énergie mécanique E s'écrit,

$$\dot{E} = \left(m\ddot{r} + mr\sin^2\theta\,\Omega^2 + k\,(r - \ell_0) + mg\cos\theta\right)\dot{r} \tag{24}$$

   Compte tenu de l'équation du mouvement radial (11) de la bille, la dérivée temporelle de l'énergie mécanique (24) devient,

$$\dot{E} = 2mr\dot{r}\sin^2\theta\,\Omega^2 \tag{25}$$

   Ainsi, pour que l'énergie soit constante, il faut que la bille soit à l'équilibre par rapport au tube.

$$\dot{E} = 2mr\dot{r}\sin^2\theta\,\Omega^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r = r_0 = \text{cste} \tag{26}$$

   Solution 2 : Pour que l'énergie mécanique E soit constante, il faut que l'énergie cinétique totale T et l'énergie potentielle totale V soient constantes. Pour ce faire, il faut que la vitesse de la bille soit constante, ce qui implique que sa vitesse radiale doit être nulle et que la bille doit être à l'équilibre par rapport au référentiel accéléré $\mathcal{R}'$ du tube en rotation,

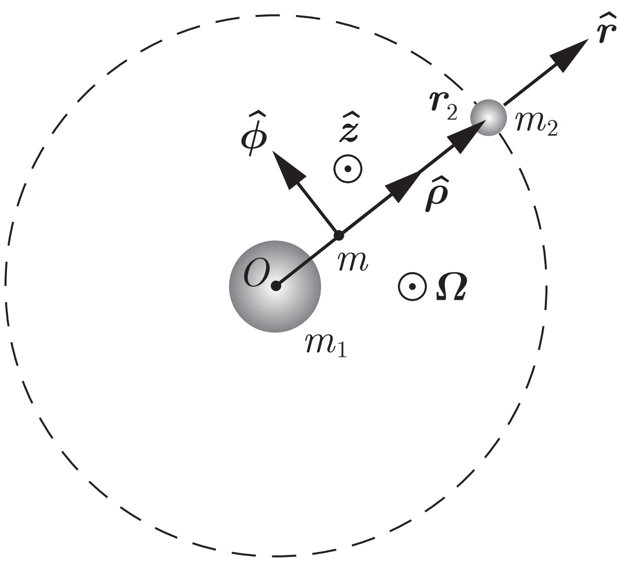
$$\dot{r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad r = r_0 = \text{cste} \tag{27}$$

2. Etoile et exoplanète (3.5/10 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



On considère un système stellaire constitué de deux astres : une étoile de masse m_1 et une exoplanète de masse m_2. L'étoile a une masse beaucoup plus grande que l'exoplanète, i.e. $m_1 \gg m_2$. Les astres sont traités comme des points matériels et le système est considéré comme isolé car on peut négliger l'influence gravitationnelle du reste de l'univers. On prend comme origine O le centre de masse de l'étoile. L'exoplanète a un mouvement de rotation circulaire uniforme autour de l'étoile dans le plan stellaire par rapport au référentiel d'inertie $\mathcal{R}$ centré à l'origine O. Ce mouvement est décrit par le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\hat{\boldsymbol{z}}$ où $\Omega = \text{cste} > 0$. Dans le référentiel accéléré $\mathcal{R}'$ où les astres sont immobiles, le vecteur position de l'exoplanète est $\boldsymbol{r}_2 = r_2\,\hat{\boldsymbol{r}}$.

Une sonde de masse m considérée comme un point matériel P a un mouvement rectiligne le long de l'axe qui lie l'étoile à l'exoplanète. On attache un repère polaire $\left(P, \hat{\boldsymbol{\rho}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}\right)$ à la sonde. La masse m de la sonde est négligeable par rapport aux masses m_1 et m_2. Ainsi, la présence de la sonde ne modifie pas le mouvement des astres.

Les réponses doivent être exprimées en termes des grandeurs scalaires données ci-dessus, des coordonnées polaires ρ et ϕ, de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ du repère polaire et de la constante de la gravitation universelle G.

Questions et réponses au verso !

1. (**0.5 point**) Dans le référentiel d'inertie $\mathcal{R}$ centré à l'origine O, déterminer la vitesse angulaire scalaire Ω qui décrit la rotation uniforme de l'exoplanète autour de l'étoile.

   Vu que le système stellaire est isolé et que l'influence gravitationnelle de la sonde peut être négligée, la seule force extérieure exercée sur l'exoplanète de masse m_2 est la force gravitationnelle $\boldsymbol{F}_G$ générée par l'étoile de masse m_1. Ainsi, dans le référentiel d'inertie $\mathcal{R}$, la loi vectorielle du mouvement absolu de l'exoplanète s'écrit,

   $$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{F}_G = m_2\,\boldsymbol{a}_2 \tag{1}$$

   où la force gravitationnelle est donnée par,

   $$\boldsymbol{F}_G = -\,\frac{G\,m_1\,m_2}{r_2^2}\,\hat{\boldsymbol{r}} = -\,\frac{G\,m_1\,m_2}{r_2^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{2}$$

   et l'accélération centripète associée au mouvement circulaire uniforme de l'exoplanète s'écrit,

   $$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_2) = r_2\,\Omega^2\,\hat{\boldsymbol{z}}\times(\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{\rho}}) = -\,r_2\,\Omega^2\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{3}$$

   En substituant la force gravitationnelle (2) et l'accélération centripète (3) dans la loi vectorielle du mouvement (1), et en la projetant ensuite le long de la ligne de coordonnée radiale, on obtient l'équation du mouvement,

   $$-\,\frac{G\,m_1\,m_2}{r_2^2} = -\,m_2\,r_2\,\Omega^2 \tag{4}$$

   Ainsi, la vitesse angulaire scalaire est donnée par,

   $$\Omega = \sqrt{\frac{G\,m_1}{r_2^3}} \tag{5}$$

2. (**1.5 point**) Dans le référentiel accéléré $\mathcal{R}'$ où les astres sont immobiles, la sonde a un mouvement rectiligne le long de l'axe qui lie l'étoile à l'exoplanète. Ce mouvement est dû à son moteur qui exerce une force $\boldsymbol{F} = F\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$ orthogonale au mouvement. Déterminer la norme et l'orientation des autres forces exercées sur la sonde.

   Le mouvement de la sonde par rapport au référentiel accéléré est un mouvement rectiligne le long de l'axe qui lie l'étoile à l'exoplanète. Ainsi, les vecteurs position relative $\boldsymbol{r}_r\,(P)$, vitesse relative $\boldsymbol{v}_r\,(P)$ et accélération relative $\boldsymbol{a}_r\,(P)$ de la sonde s'écrivent en coordonnées polaires comme,

   $$\boldsymbol{r}_r\,(P) = \rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{6}$$
   $$\boldsymbol{v}_r\,(P) = \dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{7}$$
   $$\boldsymbol{a}_r\,(P) = \ddot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{8}$$

   Les forces extérieures qui s'exercent sur la sonde sont la force d'entraînement du moteur $\boldsymbol{F} = F\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$, la force gravitationnelle $\boldsymbol{F}_{G,1}$ exercée par l'étoile et la force gravitationnelle $\boldsymbol{F}_{G,2}$ exercée par l'exoplanète. Compte tenu de la position relative (6) de la sonde et du vecteur position relative de l'exoplanète $\boldsymbol{r}_2 = r_2\,\hat{\boldsymbol{\rho}}$,

   $$\boldsymbol{F}_{G,1} = -\,\frac{G\,m_1\,m}{\|\boldsymbol{r}_r\,(P)\|^2}\,\hat{\boldsymbol{r}} = -\,\frac{G\,m_1\,m}{\rho^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{9}$$

   $$\boldsymbol{F}_{G,2} = \frac{G\,m_2\,m}{\|\boldsymbol{r}_r\,(P) - \boldsymbol{r}_2\|^2}\,\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{G\,m_2\,m}{(r_2-\rho)^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{10}$$

   Comme le référentiel accéléré $\mathcal{R}'$ a un mouvement de rotation autour de l'étoile à vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\Omega}$ par rapport au référentiel d'inertie $\mathcal{R}$, il n'y a pas de force de translation

$\boldsymbol{F}_t$ et de force d'Euler $\boldsymbol{F}_E$. Ainsi, les forces d'inertie sont la force centrifuge $\boldsymbol{F}_c$ et la force de Coriolis $\boldsymbol{F}_C$. Compte tenu du vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\hat{\boldsymbol{z}}$ et des vecteurs positions relative (6) et vitesse relative (7) de la sonde, les forces centrifuge et de Coriolis s'écrivent,

$$\boldsymbol{F}_c = -\,m\,\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}_r(P)) = -\,m\,\Omega^2\rho\,\hat{\boldsymbol{z}}\times(\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{\rho}}) = m\,\Omega^2\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{F}_C = -\,2\,m\,\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_r(P) = -\,2\,m\,\Omega\,\dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{\rho}} = -\,2\,m\,\Omega\,\dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{12}$$

3. (**0.5 point**) Dans le référentiel accéléré $\mathcal{R}'$ où les astres sont immobiles, déterminer l'équation du mouvement de la sonde selon la ligne de coordonnée radiale de vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{\rho}}$.

La loi vectorielle du mouvement relatif radial de la sonde P dans le plan stellaire par rapport au référentiel accéléré $\mathcal{R}'$ s'écrit,

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} + \sum \boldsymbol{F}^{\,\text{in}} = m\,\boldsymbol{a}_r(P) \tag{13}$$

La résultante des forces extérieures exercées sur la sonde est la somme de la force d'entraînement du moteur et des forces gravitationnelles (9) et (10),

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = F\,\hat{\boldsymbol{\phi}} - \frac{G\,m_1\,m}{\rho^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{G\,m_2\,m}{(r_2-\rho)^2}\,\hat{\boldsymbol{\rho}} \tag{14}$$

La résultante des forces d'inertie exercées sur la sonde est la somme de la force centrifuge (11) et de la force de Coriolis (12),

$$\sum \boldsymbol{F}^{\,\text{in}} = \boldsymbol{F}_c + \boldsymbol{F}_C = m\,\Omega^2\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} - \,2\,m\,\Omega\,\dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{15}$$

En substituant la résultante des forces extérieures (14), la résultante des forces d'inertie (15) et l'accélération relative (8) de la sonde dans la loi vectorielle du mouvement relatif (13) et en la projetant le long de l'axe de coordonnées radial, on obtient l'équation du mouvement relatif radial de la sonde,

$$\text{selon}\quad \hat{\boldsymbol{\rho}}:\quad -\,\frac{G\,m_1\,m}{\rho^2} + \frac{G\,m_2\,m}{(r_2-\rho)^2} + m\,\Omega^2\rho = m\,\ddot{\rho} \tag{16}$$

Pour que la sonde ait un mouvement relatif radial, il faut que la force d'entraînement du moteur compense la force de Coriolis,

$$\boldsymbol{F} = -\,\boldsymbol{F}_C = 2\,m\,\Omega\,\dot{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \qquad \text{ainsi} \qquad F = 2\,m\,\Omega\,\dot{\rho} \tag{17}$$

4. (**0.5 point**) Dans le référentiel accéléré $\mathcal{R}'$ où les astres sont immobiles, déterminer la coordonnée radiale d'équilibre ρ_0 de la sonde entre les deux astres. La démarche à suivre consiste à utiliser la distance $r_0 = r_2 - \rho_0 > 0$ qui sépare la coordonnée d'équilibre et l'exoplanète, où $r_0/r_2 \ll 1$ car $m_2 \ll m_1$, puis à se servir du développement limité au premier ordre en r_0/r_2 suivant,

$$\frac{1}{(r_2-r_0)^2} = \frac{1}{r_2^2\left(1-\dfrac{r_0}{r_2}\right)^2} \simeq \frac{1}{r_2^2}\left(1+2\,\frac{r_0}{r_2}\right)$$

pour déterminer r_0. La position d'équilibre est appelé le point de Lagrange L_1 et la distance r_0 est le rayon de la sphère de Hill de l'exoplanète.

Dans le référentiel accéléré $\mathcal{R}'$, la vitesse radiale $\dot{\rho}$ et l'accélération radiale $\ddot{\rho}$ de la sonde s'annulent à l'équilibre en $\rho = \rho_0$, i.e. $\dot{\rho} = 0$ et $\ddot{\rho} = 0$. Alors, compte tenu de la vitesse angulaire (5) d'entraînement Ω du référentiel accéléré, l'équation du mouvement radial (16) de la sonde divisée par sa masse m devient,

$$-\,\frac{G\,m_1}{\rho_0^2} + \frac{G\,m_2}{(r_2-\rho_0)^2} + \frac{G\,m_1}{r_2^3}\,\rho_0 = 0 \tag{18}$$

La condition d'équilibre (18) divisée par la constante de la gravitation universelle G est exprimée en terme de $r_0 = r_2 - \rho_0$ comme,

$$- \frac{m_1}{\left(r_2 - r_0\right)^2} + \frac{m_2}{r_0^2} + \frac{m_1}{r_2^3}\left(r_2 - r_0\right) = 0 \tag{19}$$

Au premier ordre en r_0/r_2, la condition d'équilibre (19) devient,

$$- \frac{m_1}{r_2^2}\left(\cancel{1} + 2\,\frac{r_0}{r_2}\right) + \frac{m_2}{r_0^2} + \frac{m_1}{r_2^3}\left(\cancel{r_2} - r_0\right) = 0 \tag{20}$$

et se réduit à,

$$- 3\,\frac{m_1\,r_0}{r_2^3} + \frac{m_2}{r_0^2} = 0 \tag{21}$$

Ainsi, le rayon de la sphère de Hill s'écrit,

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{m_2}{3\,m_1}}\,r_2 \tag{22}$$

Par conséquent, la coordonnée radiale d'équilibre du point de Lagrange L_1 est donnée par,

$$\rho_0 = r_2 - r_0 = \left(1 - \sqrt[3]{\frac{m_2}{3\,m_1}}\right) r_2 \tag{23}$$

5. (**0.5 point**) La sonde de masse m s'est posée sur la surface de l'exoplanète sphérique de masse m_2 et de rayon R_0. Déterminer la norme de la vitesse minimale de décollage $\boldsymbol{v}_0 = v_0\,\hat{\boldsymbol{r}}$ de la sonde à la surface de l'exoplanète afin que sa vitesse soit $\boldsymbol{v}_1 = v_1\,\hat{\boldsymbol{r}}$ à une distance R_1 du centre de l'exoplanète. On néglige les effets de l'attraction gravitationnelle de l'étoile et de la rotation de l'exoplanète autour de l'étoile sur le mouvement de la sonde, c'est-à-dire qu'on considère l'exoplanète comme un référentiel d'inertie isolé.

La seule force extérieure exercée sur la sonde est la force gravitationnelle $\boldsymbol{F}_G$ exercée par l'exoplanète,

$$\boldsymbol{F}_G\left(r\right) = -\,\frac{G\,m_2\,m}{r^2}\,\hat{\boldsymbol{r}} \tag{24}$$

qui est une force conservative. On peut donc utiliser la conservation de l'énergie mécanique. L'énergie cinétique T s'écrit,

$$T = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \tag{25}$$

et l'énergie potentielle gravitationnelle V_G en r est donnée par,

$$V_G = -\int_{\infty}^{r} \boldsymbol{F}_G\left(r'\right)\cdot d\boldsymbol{r}' = \int_{\infty}^{r} \frac{G\,m_2\,m\,dr'}{r'^{\,2}} = G\,m_2\,m \int_{\infty}^{r} \frac{dr'}{r'^{\,2}} = -\,\frac{G\,m_2\,m}{r} \tag{26}$$

où $d\boldsymbol{r}' = dr'\,\hat{\boldsymbol{r}}$. Ainsi, la conservation de l'énergie mécanique durant le mouvement s'écrit formellement,

$$T_0 + V_{G,0} = T_1 + V_{G,1} \tag{27}$$

Compte tenu de l'énergie cinétique (25) et de l'énergie potentielle gravitationnelle (26), la conservation de l'énergie mécanique (27) devient,

$$\frac{1}{2}\,m\,v_0^2 - \frac{G\,m_2\,m}{R_0} = \frac{1}{2}\,m\,v_1^2 - \frac{G\,m_2\,m}{R_1} \tag{28}$$

Ainsi, la norme de la vitesse de décollage de la sonde est donnée par,

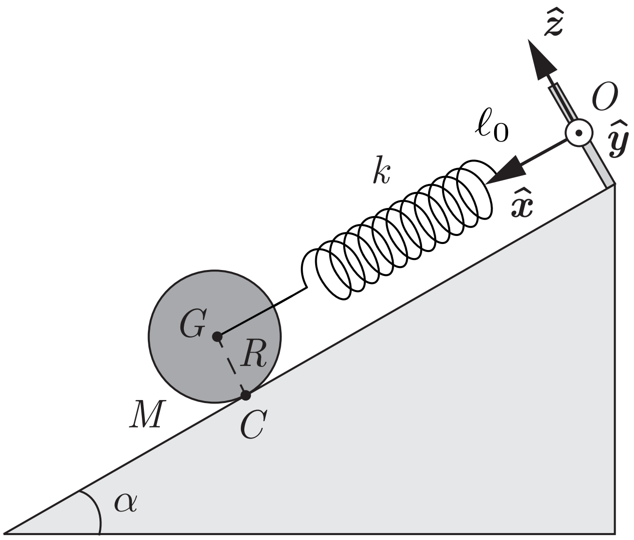
$$v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2\,G\,m_2\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right)} \tag{29}$$

3. Cylindre oscillant (3/10 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



On considère un cylindre plein, homogène, de rayon R et de masse M qui roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. L'axe de symétrie horizontal du cylindre qui passe par son centre de masse G est attaché à un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité est fixée au sommet du plan incliné. Un mécanisme assure que l'axe du cylindre reste horizontal. Le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe de symétrie passant par son centre de masse est $I_G = \frac{1}{2}\,MR^2$. L'origine O est prise au point d'attache du ressort au haut du plan incliné.

Les réponses doivent être exprimées en termes des grandeurs scalaires données ci-dessus, des coordonnées cartésiennes x, y et z, de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ et $\hat{\boldsymbol{z}}$ du repère cartésien et de la norme du champ gravitationnel g.

Questions et réponses au verso !

1. (**0.5 point**) Déterminer la norme et l'orientation du moment cinétique $\boldsymbol{L}_C$ du cylindre évalué par rapport au point de contact C entre le cylindre et le plan incliné.

   Comme le mouvement de rotation du cylindre homogène de masse M et de rayon R a lieu autour de son axe de symétrie, son vecteur vitesse angulaire s'écrit,

   $$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\psi}\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{1}$$

   où ψ est l'angle de rotation propre défini positif pour une rotation dans le sens trigonométrique. La vitesse du centre de masse du cylindre s'écrit,

   $$\boldsymbol{V}_G = \dot{X}_G\,\hat{\boldsymbol{x}} \tag{2}$$

   La condition de roulement sans glissement du cylindre implique que la vitesse du point de contact s'annule, i.e. $\boldsymbol{V}_C = \boldsymbol{0}$. Par conséquent, les vitesses du centre de masse G et du point de contact G sont liés par la relation,

   $$\boldsymbol{V}_G = \boldsymbol{V}_C + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{CG} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{CG} \tag{3}$$

   Compte tenu des vecteurs vitesse angulaire (1) et vitesse du centre de masse (2) et de $\boldsymbol{CG} = R\,\hat{\boldsymbol{z}}$, la condition de roulement sans glissement (3) devient,

   $$\dot{X}_G\,\hat{\boldsymbol{x}} = \left(\dot{\psi}\,\hat{\boldsymbol{y}}\right) \times (R\,\hat{\boldsymbol{z}}) = R\,\dot{\psi}\,\hat{\boldsymbol{x}} \qquad \text{ainsi} \qquad \dot{X}_G = R\,\dot{\psi} \tag{4}$$

   Solution 1 : Compte tenu de la condition de roulement sans glissement (4) et du fait que le moment d'inertie du cylindre évalué au centre de masse G est $I_G = \frac{1}{2}\,MR^2$, son moment cinétique $\boldsymbol{L}_G$ évalué au centre de masse G s'écrit,

   $$\boldsymbol{L}_G = I_G\,\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\,MR^2\,\dot{\psi}\,\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{2}\,MR\,\dot{X}_G\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{5}$$

   Le théorème de transfert du moment cinétique entre les points G et C s'écrit,

   $$\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{L}_G + \boldsymbol{CG} \times M\,\boldsymbol{V}_G = \frac{1}{2}\,MR\,\dot{X}_G\,\hat{\boldsymbol{y}} + (R\,\hat{\boldsymbol{z}}) \times \left(M\dot{X}_G\,\hat{\boldsymbol{x}}\right) = \frac{3}{2}\,MR\,\dot{X}_G\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{6}$$

   Solution 2 : A l'aide du théorème de Huygens-Steiner, le moment d'inertie I_C du cylindre autour de l'axe horizontal parallèle à l'axe de symétrie qui passe par le point de contact C est donné par,

   $$I_C = I_G + MR^2 = \frac{3}{2}\,MR^2 \tag{7}$$

   Compte tenu de la condition de roulement sans glissement (4) et du fait que le moment d'inertie du cylindre évalué au centre de masse G est $I_G = \frac{1}{2}\,MR^2$, son moment cinétique $\boldsymbol{L}_C$ évalué au point de contact C s'écrit,

   $$\boldsymbol{L}_C = I_C\,\boldsymbol{\Omega} = \frac{3}{2}\,MR^2\,\dot{\psi}\,\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{3}{2}\,MR\,\dot{X}_G\,\hat{\boldsymbol{y}} \tag{8}$$

2. (**0.5 point**) Déterminer la norme et l'orientation de la résultante des moments de forces extérieures $\boldsymbol{M}_C^{\text{ext}}$ évaluée par rapport au point de contact C entre le cylindre et le plan incliné explicitement en fonction de M et k.

   Les forces extérieures qui donnent lieu à des moments de forces non-nuls par rapport au point de contact C sont le poids $\boldsymbol{P}$ du cylindre et la force élastique $\boldsymbol{F}_e$ exercée par le ressort,

   $$\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g} = Mg\,(\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}} - \cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{z}}) \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{F}_e = -\,k\,(X_G - \ell_0)\,\hat{\boldsymbol{x}} \tag{9}$$

Ces deux forces extérieures sont exercées sur le centre de masse G du cylindre. Par conséquent, compte tenu du poids et de la force élastique (9), la résultante des moments de forces extérieures évaluée au point de contact C s'écrit,

$$\boldsymbol{M}_C^{\text{ext}} = \boldsymbol{CG} \times \boldsymbol{P} + \boldsymbol{CG} \times \boldsymbol{F}_e = (R\,\hat{\boldsymbol{z}}) \times Mg\,(\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}} - \cancel{\cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{z}}}) - (R\,\hat{\boldsymbol{z}}) \times k\,(X_G - \ell_0)\,\hat{\boldsymbol{x}} \quad (10)$$

et se réduit à,

$$\boldsymbol{M}_C^{\text{ext}} = \Big(MgR\sin\alpha - kR\,(X_G - \ell_0)\Big)\,\hat{\boldsymbol{y}} \quad (11)$$

3. (**1.0 point**) Déterminer l'équation du mouvement du centre de masse du cylindre et en déduire la période d'oscillation T.

Solution 1 : La dérivée temporelle du moment cinétique du cylindre évalué au point de contact C est obtenue en dérivant l'équation (8) par rapport au temps,

$$\dot{\boldsymbol{L}}_C = \frac{3}{2}\,MR\,\ddot{X}_G\,\hat{\boldsymbol{y}} \quad (12)$$

Le théorème du moment cinétique évalué au point de contact C s'écrit,

$$\boldsymbol{M}_C^{\text{ext}} = \dot{\boldsymbol{L}}_C \quad (13)$$

Compte tenu des équations (11) et (12), la projection du théorème du moment cinétique (13) selon la ligne de coordonnée d'ordonnée donne l'équation du mouvement du centre de masse,

$$\frac{3}{2}\,MR\,\ddot{X}_G = MgR\sin\alpha - kR\,(X_G - \ell_0) \quad (14)$$

qui peut être mis sous la forme suivante,

$$\ddot{X}_G + \frac{2k}{3M}\left(X_G - \ell_0 - \frac{Mg}{k}\,\sin\alpha\right) = 0 \quad (15)$$

Solution 2 : L'énergie cinétique totale du cylindre est la somme de l'énergie cinétique de translation du centre de masse et de l'énergie cinétique de rotation propre. Compte tenu des équations (1) et (2), l'énergie cinétique totale s'écrit,

$$T = \frac{1}{2}\,MV_G^2 + \frac{1}{2}\,I_G\,\Omega^2 = \frac{1}{2}\,M\dot{X}_G^2 + \frac{1}{4}\,MR^2\,\dot{\psi}^2 = \frac{3}{4}\,M\dot{X}_G^2 \quad (16)$$

L'énergie potentielle totale est la somme de l'énergie potentielle de pesanteur V_g et de l'énergie potentielle élastique V_e. En prenant comme référence d'énergie potentielle de pesanteur la droite horizontale qui passe par l'origine O et comme référence d'énergie potentielle élastique l'extrémité du ressort à vide au repos, l'énergie potentielle totale s'écrit,

$$V = V_g + V_e = -\,MgX_G\sin\alpha + \frac{1}{2}\,k\,(X_G - \ell_0)^2 \quad (17)$$

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique totale et de l'énergie potentielle totale,

$$E = T + V = \frac{3}{4}\,M\dot{X}_G^2 - MgX_G\sin\alpha + \frac{1}{2}\,k\,(X_G - \ell_0)^2 \quad (18)$$

Comme il n'y a pas de force dissipative, l'énergie mécanique est conservée. Ainsi, la dérivée temporelle de l'énergie mécanique (18) est nulle,

$$\dot{E} = \frac{3}{2}\,M\dot{X}_G\,\ddot{X}_G - Mg\sin\alpha\,\dot{X}_G + k\,(X_G - \ell_0)\,\dot{X}_G = 0 \quad (19)$$

En divisant l'équation (19) par $\frac{3}{2}\,M\dot{X}_G$ on obtient l'équation du mouvement du centre masse,

$$\ddot{X}_G + \frac{2k}{3M}\left(X_G - \ell_0 - \frac{Mg}{k}\,\sin\alpha\right) = 0 \tag{20}$$

A l'aide de la déviation de la position du centre de masse par rapport à l'équilibre,

$$Y_G = X_G - \ell_0 - \frac{Mg}{k}\,\sin\alpha \qquad \text{ainsi} \qquad \ddot{Y}_G = \ddot{X}_G \tag{21}$$

l'équation du mouvement du centre de masse du cylindre (20) est mise sous la forme d'un oscillateur harmonique,

$$\ddot{Y}_G + \omega_G^2\,Y_G = 0 \qquad \text{où} \qquad \omega_G = \sqrt{\frac{2k}{3M}} \tag{22}$$

Ainsi la période d'oscillation est,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_G} = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2k}} \tag{23}$$

4. (**0.5 point**) Déterminer l'évolution temporelle $X_G\,(t)$ de la coordonnée d'abscisse du centre de masse du cylindre compte tenu des conditions initiales suivantes,

$$X_G\,(0) = R + \ell_0 + \frac{Mg}{k}\,\sin\alpha \qquad \text{et} \qquad \dot{X}_G\,(0) = 0 \tag{24}$$

La solution de l'équation du mouvement harmonique oscillatoire (22) est,

$$Y_G\,(t) = C_G\cos\left(\omega_G\,t + \varphi_G\right) \tag{25}$$

Compte tenu du changement de variable (21), la coordonnée de position d'abscisse du centre de masse s'écrit,

$$X_G\,(t) = C_G\cos\left(\omega_G\,t + \varphi_G\right) + \ell_0 + \frac{Mg}{k}\,\sin\alpha \tag{26}$$

et sa dérivée temporelle s'écrit,

$$\dot{X}_G\,(t) = -\,\omega_G\,C_G\sin\left(\omega_G\,t + \varphi_G\right) \tag{27}$$

Compte tenu de la deuxième condition initiale,

$$\dot{X}_G\,(0) = -\,\omega_G\,C_G\sin\left(\varphi_G\right) = 0 \qquad \text{ainsi} \qquad \varphi_G = 0 \tag{28}$$

Alors, compte tenu de la première condition initiale,

$$X_G\,(0) = C_G + \ell_0 + \frac{Mg}{k}\,\sin\alpha = R + \ell_0 + \frac{Mg}{k}\,\sin\alpha \qquad \text{ainsi} \qquad C_G = R \tag{29}$$

A l'aide de la pulsation (22) et des conditions (28) et (29), la coordonnée de position d'abscisse du centre de masse (26) s'écrit explicitement,

$$X_G\,(t) = R\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{3M}}\,t\right) + \ell_0 + \frac{Mg}{k}\,\sin\alpha \tag{30}$$

5. (**0.5 point**) Déterminer l'évolution temporelle $F_s(t)$ de la composante de la force de frottement statique $\boldsymbol{F}_s(t) = F_s(t)\,\hat{\boldsymbol{x}}$ exercée par le plan incliné sur le cylindre en fonction de la coordonnée de position du centre de masse $X_G(t)$.

   Les forces extérieures exercées sur le cylindre sont son poids $\boldsymbol{P} = Mg\,(\sin\alpha\,\hat{\boldsymbol{x}} - \cos\alpha\,\hat{\boldsymbol{z}})$, la force élastique du ressort $\boldsymbol{F}_e = -\,k\,(X_G - \ell_0)\,\hat{\boldsymbol{x}}$, la force de réaction normale du plan $\boldsymbol{N} = N\,\hat{\boldsymbol{z}}$ et la force de frottement statique $\boldsymbol{F}_s = F_s(t)\,\hat{\boldsymbol{x}}$. Le théorème du centre de masse s'écrit,

$$\boldsymbol{F}^{\,\text{ext}} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{F}_e + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_s = M\,\boldsymbol{A}_G \tag{31}$$

   où l'accélération du centre de masse G est $\boldsymbol{A}_G = \ddot{X}_G\,\hat{\boldsymbol{x}}$. La projection du théorème du centre de masse selon la ligne de coordonnée d'abscisse s'écrit,

$$Mg\sin\alpha - k\,(X_G - \ell_0) + F_s = M\,\ddot{X}_G \tag{32}$$

   Ainsi, compte tenu de l'équation du mouvement (20), la composante d'abscisse de la force de frottement statique s'écrit,

$$F_s(t) = M\,\ddot{X}_G(t) + k\left(X_G(t) - \ell_0 - \frac{Mg}{k}\sin\alpha\right) = \frac{k}{3}\left(X_G(t) - \ell_0 - \frac{Mg}{k}\sin\alpha\right) \tag{33}$$

   Finalement, compte tenu de l'équation horaire (30), l'évolution temporelle de cette composante est donnée par,

$$F_s(t) = \frac{1}{3}\,kR\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{3M}}\,t\right) \tag{34}$$